Oplossing Cursor opgave

Hans Zantema, voorjaar 2023

Aan het begin geldt $B = 72$ en $A = 144$. Vervolgens worden de volgende drie commando's oneindig lang herhaald:
$A := A + B$;
als B even, dan $A := A + 10$;
als A even, dan $B := B - 1$.
Als we hier goed naar kijken zien we dat B nooit groter wordt, alleen maar soms kleiner. Als dat laatste heel vaak gebeurt wordt B negatief, en zelfs kleiner dan -10, en dan zal met de commando's $A := A + B$, soms aangevuld met $A := A + 10$, de waarde van A ook alleen maar kleiner worden. Dus op dit punt zal de hoogste waarde van A bereikt zijn, en we moeten nu uitzoeken wat die waarde is. Een makkelijke manier is om het herhalen van bovenstaande commando's in een programmeertaal zoals Python in te tikken, en dan te zien wat eruit komt. Als extra check heb ik dat ook gedaan, maar het kan ook zonder computerondersteuning, zoals we nu gaan zien. Om een patroon in het veranderen van de waarden van A en B te vinden is het lastig dat sommige commando's ervan afhangen of A of B even zijn. Daarom kijken we wat er gebeurt als we de drie commando's herhaald uitvoeren vanuit een situatie waarin A en B beide even zijn, laten we deze startwaardes maar a en b noemen. Bij het eerste drietal commando's wordt dan A vervangen door $a + b + 10$, nog steeds even, en B vervangen door $b - 1$, oneven. Nogmaals het drietal commando's levert dan $a + 2b + 9$ voor A, en $b - 1$ voor B, beide oneven. Maar als we het drietal commando's voor de derde keer uitvoeren krijgen we $A = a + 3b + 8$ en $B = b - 2$, allebei even. Dus als we driemaal de drie commando's uitvoeren op even getallen A en B is het effect

$$A := A + 3B + 8; \;\; B := B - 2,$$

veel eenvoudiger, en nu zonder tests op even. Bij de startwaarden $A = 144$ en $B = 72$ levert dit in de eerste n stappen (die elk overeenkomen met 9 commando's) voor $n = 0, 1, 2$:

n	A	B
0	144	72
1	368	70
2	586	68

Als we dit voortzetten tot $n = 36$ komen we uit op $B = 0$, en zal A in de buurt van zijn maximale waarde liggen. Maar al die 36 stappen willen we niet met de hand uitvoeren, dus we willen iets anders verzinnen.

Van de *driehoeksgetallen* is bekend dat als we beginnen met $A = 0$, $B = 1$, en we voeren

$$A := A + B; \;\; B := B + 1$$

n maal uit, dat dan na afloop de waarde van A gelijk is aan $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$. De factoren zijn een beetje anders, maar de analogie is groot genoeg dat we kunnen hopen dat bij onze vraag de waarde van A na n stappen van de vorm $pn^2 + qn + r$ is, voor nader te bepalen getallen p, q, r. Door de waarden uit de tabel erin te stoppen krijgen we

$$p \times 0 + q \times 0 + r = 144,$$

$$p \times 1 + q \times 1 + r = 368,$$

$$p \times 4 + q \times 2 + r = 586,$$

waaruit volgt $r = 144$, $p + q = 224$ en $4p + 2q = 442$. Uit die laatste twee volgt $2p = 442 - 2 \times 224 = -6$, oftewel $p = -3$. En met $p + q = 224$ levert dat $q = 227$, dus als het van deze vorm is, dan is de waarde van A na n stappen gelijk aan $-3n^2 + 227n + 144$. En ja hoor: je kunt met inductie bewijzen dat dat inderdaad het geval is.

En hiermee hoeven we die eerste 36 stappen, overeenkomend met $3 \times 36 = 108$ maal het drietal commando's niet allemaal zelf uit te werken, maar kunnen we direct zien dat na die 108 maal het drietal commando's de waarde van A gelijk is aan $-3 \times 36^2 + 227 \times 36 + 144 = 4428$, en de waarde van B is dan 0. Om de precieze maximale waarde van A te bepalen volstaat het nu niet meer om grote groepen commando's samen te nemen, want de maximale waarde kan ook tussendoor optreden. Wel is het afdoende om de drietallen commando's te bekijken, laten we dat nu doen in de volgende tabellen, waarin k het aantal van drietallen commando's is:

k	A	B
0	144	72
3	368	70
6	586	68
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

k	A	B
108	4428	0
109	4438	-1
110	4437	-1
111	4436	-2
112	4444	-3
113	4441	-3
114	4438	-4
115	4444	-5
116	4439	-5
118	4434	-6

waarna je kunt beredeneren dat A vanwege de negativiteit van B niet meer de waarde 4444 of hoger zal halen. De hoogste waarde voor A die optreedt in dit oneindige proces is dus 4444: het gevraagde antwoord voor deze laatste uitdaging.

Deze opgave is expres zo ontworpen dat er een mooi getal uit komt: het getal 4444 dat bestaat uit vier vieren. Toen ik op internet ging zoeken of dat getal nog een speciale betekenis had, zag ik dat het in de spirituële wereld wel het *engelengetal* genoemd wordt, en in een toelichting daarop vond ik zelfs de volgende tekst waarmee ik deze oplossing graag afsluit: *Het nummer 4444 adviseert je om sterk en positief te zijn in het licht van uitdagingen die nu in je leven zijn of die op het punt staan te komen.*