Tentamen Complexiteit IBC028

= herkansing Analyse van Algoritmen IBC013
13 augustus 2015, 8.30 - 11.30 uur

Dit tentamen bestaat uit vijf opgaven die alle even zwaar tellen.

Het tentamen is een gesloten-boek-tentamen, dat wil zeggen dat er tijdens het tentamen geen gebruik mag worden gemaakt van het boek en/of aantekeningen.

Voor alle vragen geldt: motiveer uw antwoord.

Opgave 1.

a. De functie T is gegeven door $T(1) = 1$ en $T(n) = 4T(\lfloor n/2 \rfloor) + n^2$ als $n > 1$. Bepaal een functie f zodanig dat $T(n) = \Theta(f(n))$.

b. De functie T is gegeven door $T(1) = 1$ en $T(n) = 3T(\lfloor n/2 \rfloor) + n^2$ als $n > 1$. Bepaal een functie f zodanig dat $T(n) = \Theta(f(n))$.

Opgave 2.

a. Van het behandelde algoritme om de mediaan te bepalen is aangetoond dat de complexiteit T voldoet aan

$$T(n) = T(n/5) + T(7n/10) + O(n).$$

Geef het bewijs dat hieruit volgt dat $T(n) = O(n)$; effecten vanwege afronden mogen worden genegeerd.

b. De functie f is gedefinieerd door $f(0) = f(1) = 1$ en $f(n) = n + f(n-1) + f(n-2)$ voor $n > 1$. Bewijs dat f tenminste exponentieel is, dat wil zeggen dat er een $c > 1$ bestaat met $f(n) = \Omega(c^n)$.

Opgave 3.

Gegeven is een verzameling P van n punten in het platte vlak.
Geef een algoritme met complexiteit $O(n \log n)$ dat vaststelt of hiervan voor twee punten (x, y) en (x', y') geldt dat $|x - x'| \leq 1$ en $|y - y'| \leq 1$.

Opgave 4.

a. Geef aan wat wordt verstaan onder het vertex cover probleem.

b. Geef het bewijs van de stelling die zegt dat L NP-hard is als er een L' bestaat die NP-hard is en waarvoor geldt $L' \leq_P L$. Hierbij mag gebruikt gemaakt worden van het feit dat $\leq_P$ transitief is.

Opgave 5.

Het *integer linear programming probleem* (ILP) luidt als volgt:
Gegeven een aantal ongelijkheden over de variabelen $x_1 \ldots, x_n$ van de vorm

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots a_n x_n \leq c$$

voor gegeven gehele getallen $a_1, \ldots, a_n, c$. Stel vast of er gehele getallen $x_1 \ldots, x_n$ bestaan waarvoor al deze ongelijkheden waar zijn.

a. Geef aan wat bewezen moet worden om te concluderen dat ILP NP-compleet is, gebruikmakend van het feit dat 3SAT NP-compleet is.

b. Geef dit bewijs.